Minimalni polinom matrice

Posmatrajmo polinom $f(x)$ nad poljem K, recimo

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

Ako je A kvadratna matrica nad K, tada definišemo

$$f(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I$$

gdje je I jedinična matrica.
Kažemo da je A korijen ili nula polinoma $f(x)$ ako je $f(A) = 0$.

1. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Izračunati $f(A)$ ako je:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$

b) $f(t) = t^2 - 5t - 2$

Rj. a) $f(A) = 2A^2 - 3A + 7I = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= 2\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 14 \\ 21 & 39 \end{bmatrix}$$

b)

$$f(A) = A^2 - 5A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prema tome A je nula polinoma $f(t) = t^2 - 5t - 2$.

2. ^{V} Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Izračunati $f(A)$ ako je

a) $f(t) = t^2 - 3t + 7$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 13$

Rješenja: a) $f(A) = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ b) $f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Definicija Karakteristični polinom matrice A je polinom oblika $k(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Teorema (Cayley-Hamilton) $k(A) = 0$ (svaka matrica je nula svog karakterističnog polinoma)

3. Odrediti karakteristični polinom $k(\lambda)$ matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Izračunati $k(B)$.

Rj. $k(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

Prema Cayley-Hamilton teoremi predviđamo da je B nula polinoma $k(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$.

$$k(B) = B^2 - 3B - 4I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Slične matrice imaju isti karakteristični polinom. Dokazati.

Rj. Neka su A i B slične matrice. Pokažimo da je $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)$ tj. $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$.
Kako su A i B slične matrice to postoji invertibilna matrica P takva da je $B = P^{-1}AP$ (ovo je dokazano na predavanjima)

$$\lambda I = \lambda(P^{-1} I P) = P^{-1}(\lambda I)P$$

$$\det(\lambda I - B) = \det(P^{-1}\lambda I P - P^{-1}AP) =$$

$$= \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\cdot\det(P)$$

Kako su determinante skalari i važi komutativnost i s obzirom da je $\det(P^{-1})\det(P) = 1$ imamo

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$$

q.e.d.

5. ^{V} Odrediti karakteristični polinom $k(\lambda)$ matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$. Izračunati $k(A)$.

Rj. $k(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 8\lambda + 62$.

Monic (normirani) polinom je polinom oblika $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ kod koga koeficijent najvećeg stepena ima vrijednost 1.

Definicija Neka je A n-kvadratna matrica nad poljem K i neka $\mathcal{M}(A)$ predstavlja familiju svih normiranih polinoma $f(t)$ za koje vrijedi $f(A)=0$. Monic polinom $m(t)$ najmanjeg stepena u $\mathcal{M}(A)$ nazivamo minimalni polinom od A.

Teorem Minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice A djeli svaki polinom koji ima A kao nulu. Konkretno $m(\lambda)$ djeli karakteristični polinom $k(\lambda)$ od A.

Teorem Karakteristični i minimalni polinomi matrice A imaju iste nesvodljive faktore.

Teorem Skalar λ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako je λ korijen minimalnog polinoma matrice A.

6. Odrediti minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice $A=\begin{bmatrix}2&2&-5\\3&7&-15\\1&2&-4\end{bmatrix}$.

Rj. Prvo ćemo odrediti karakterističan polinom $k(\lambda)$ matrice A.

$$k(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&5\\-3&\lambda-7&15\\-1&-2&\lambda+4\end{vmatrix}\overset{I_k+(II_k+III_k)}{=}\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&5\\\lambda+5&\lambda-7&15\\\lambda+1&-2&\lambda+4\end{vmatrix}\overset{III_v-I_v}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&5\\\lambda+5&\lambda-7&15\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1&-2\\\lambda+5&\lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-1)\Big[\overbrace{(\lambda+1)(\lambda-7)}^{\lambda^2-6\lambda-7}+\overbrace{2(\lambda+5)}^{+2\lambda+10}\Big]=$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-3)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

Minimalni polinom $m(\lambda)$ mora djeliti $k(\lambda)$. Također, svaki nesvodljivi faktor od $k(\lambda)$, tj. $\lambda-1$ i $\lambda-3$, su također faktori od $m(\lambda)$. Prema tome $m(\lambda)$ je tačno jedan od sljedećih:

$$f(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-1) \quad \text{ili} \quad g(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$$

Prema Cayley-Hamilton teoremi znamo da je $g(A)=k(A)=0$. Dovoljno je samo testirati $f(\lambda)$. Imamo:

$$f(A)=(A-I)(A-3I)=\begin{bmatrix}1&2&-5\\3&6&-15\\1&2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&-5\\3&4&-15\\1&2&-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Prema tome $f(\lambda)=m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)=\lambda^2-4\lambda+3$ je minimalni polinom matrice A.

7. Naći minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice $A=\begin{bmatrix}4&-2&2\\-5&7&-5\\-6&6&-4\end{bmatrix}$.

Rj. Prvo ćemo odrediti karakteristični polinom $k(\lambda)$ matrice A.

$$k(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-4&2&-2\\5&\lambda-7&5\\6&-6&\lambda+4\end{vmatrix}\overset{II_k+III_k}{=}\begin{vmatrix}\lambda-4&0&-2\\5&\lambda-2&5\\6&\lambda-2&\lambda+4\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&0&-2\\5&1&5\\6&1&\lambda+4\end{vmatrix}\overset{III_v-II_v}{=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&0&-2\\5&1&5\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&-2\\1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\overset{II_v+I_v}{=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&-2\\\lambda-3&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-4&-2\\1&1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-2)$$

$$k(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

Minimalni polinom $m(\lambda)$ djeli $k(\lambda)$. Svaki nesvodljivi faktor od $k(\lambda)$ (u našem slučaju $\lambda-2$ i $\lambda-3$) je također faktor od $m(\lambda)$. Prema tome $m(\lambda)$ je tačno jedan od sljedeća dva polinoma:

$$f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3) \quad \text{i} \quad g(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

$$f(A)=(A-2I)(A-3I)=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-5&5&-5\\-6&6&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&2\\-5&4&-5\\-6&6&-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Minimalni polinom matrice A je $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)=\lambda^2-5\lambda+6$

8. Naći minimalne polinome $m(\lambda)$ matrica:

a) $B=\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}$ b) $C=\begin{bmatrix}0&2&4\\\frac{1}{2}&0&2\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$

\# Minimalni polinom $m(t)$ matrice A djeli svaki polinom $f(t)$ kadgod je $f(A)=0$.

R: Pretpostavimo da je $f(t)$ polinom za koji $f(A)=0$.
Neka je $m(t)$ minimalni polinom matrice A.
Prema algoritmu djeljenja za polinome postoji polinom $g(t)$ i $r(t)$ za koji važi

$$f(t)=m(t)g(t)+r(t) \quad i \quad r(t)=0 \quad \text{ili } stepen(r(t))<stepen(m(t))$$

Ako stavimo da je $t=A$ u ovu jednakost, i iskoristimo činjenice da je $f(A)=0$ i $m(A)=0$ dobićemo da je $r(A)=0$.
Ako bi bilo da je $r(t)\neq 0$ tada je $r(t)$ polinom stepena manjeg nego $m(t)$ koji ima A kao nulu, što je kontradikcija sa definicijom minimalnog polinoma.
Prema tome $r(t)=0$ pa time $f(t)=m(t)g(t)$ tj.

$m(t)$ djeli $f(t)$ kadgod je $f(A)=0$.

q.e.d.

\# Neka su date matrice $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$.
Pokazati da A i B imaju različite karakteristične polinome (pa prema tome nisu slične), ali imaju isti minimalni polinom. Prema tome ne slične matrice mogu imati isti minimalni polinom.

\# Neka je A n-kvadratna matrica za koju je $A^k=0$ za neko $k>n$. Pokazati da $A^n=0$.

\# Pokazati da matrica A i njezina transponovana matrica A^T imaju isti minimalni polinom.

\# Pokazati da A je skalarna matrica kI ako i samo ako minimalni polinom od A je $m(\lambda)=\lambda-k$.

\# Neka je $m(\lambda)$ minimalni polinom n-kvadratne matrice A.
a) Pokazati da karakterističan polinom matrice A djeli $(m(\lambda))^n$.
b) Dokazati da $m(\lambda)$ i $k(\lambda)$ imaju iste nesvodljive faktore

R: a) Neka je minimalni polinom matrice A
$m(\lambda)=\lambda^r-c_1\lambda^{r-1}+\ldots+c_{r-1}\lambda+c_r$. Posmatrajmo sljedeće matrice

$$B_0=I$$
$$B_1=A+c_1I$$
$$B_2=A^2+c_1A+c_2I$$
$$\ldots$$
$$B_{r-1}=A^{r-1}+c_1A^{r-1}+\ldots+c_{r-1}I$$

Tada

$$B_0=I$$
$$B_1-AB_0=B_1-A=c_1I$$
$$B_2-AB_1=B_2-A^2-c_1A=c_2I$$
$$\ldots$$
$$B_{r-1}-AB_{r-2}=c_{r-1}I$$

Također $B_r-AB_{r-1}=c_rI$

$$-AB_{r-1}=c_rI-B_r=c_rI-(A^r+c_1A^{r-1}+\ldots+c_{r-1}A+c_rI)=$$
$$=c_rI-m(A)=rI$$

Stavimo $B(\lambda)=\lambda^{r-1}B_0+\lambda^{r-2}B_1+\ldots+\lambda B_{r-2}+B_{r-1}$. Tada

$$(\lambda I-A)\cdot B(\lambda)=\lambda B(\lambda)-A\cdot B(\lambda)=$$
$$=(\lambda^rB_0+\lambda^{r-1}B_1+\ldots+\lambda B_{r-1})-(\lambda^{r-1}AB_0+\lambda^{r-2}AB_1+\ldots+AB_{r-1})$$
$$=\lambda^rB_0+\lambda^{r-1}(B_1-AB_0)+\lambda^{r-2}(B_2-AB_1)+\ldots+\lambda(B_{r-1}-AB_{r-2})-AB_{r-1}$$
$$=\lambda^rI+c_1\lambda^{r-1}I+c_2\lambda^{r-2}I+\ldots+c_{r-1}\lambda I+c_r\lambda=m(\lambda)I$$

Ako stavimo determinante na obe strane jednakosti imamo
$\det(\lambda I-A)\cdot\det(B(\lambda))=\det(m(\lambda)I)=(m(\lambda))^n$.
Kako je $\det(B(\lambda))$ polinom $\det(\lambda I-A)$ djeli $(m(\lambda))^n$ tj. karakteristični polinom od A djeli $(m(\lambda))^n$.

q.e.d.

b) Pretpostavimo da je $f(\lambda)$ nesvodljivi polinom. Ako $f(\lambda)$ djeli $m(\lambda)$ tada, kako $m(\lambda)$ djeli $k(\lambda)$, $f(\lambda)$ djeli $k(\lambda)$. Sa druge strane ako $f(\lambda)$ djeli $k(\lambda)$ tada prema djelu a), $f(\lambda)$ djeli $(m(\lambda))^n$. Ali $f(\lambda)$ je nesvodljiv pa $f(\lambda)$ također djeli $m(\lambda)$.
Prema tome $m(\lambda)$ i $k(\lambda)$ imaju iste nesvodljive faktore.